Санкт-Петербургский государственный университет

Перстнева Полина Сергеевна

Выпускная квалификационная работа

Характеристические функции с большими лакунами в спектре и равномерно ограниченными суммами Фурье

Уровень образования: магистратура
Направление: 01.04.01 «Математика»
Основная образовательная программа: ВМ.5832.2019 «Современная математика».

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., академик РАН С. В. Кисляков

Рецензент:
к.ф.-м.н., доцент А. В. Васин

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1 Введение

Принцип неопределенности в гармоническом анализе гласит, что ненулевая функция и ее преобразование Фурье не могут быть одновременно малы. Существует множество достаточно разнообразных точных результатов, отражающих это явление.

Например, принцип неопределенности Гейзенберга [2] утверждает, что для произвольной функции f из пространства $L^2(\mathbb{R})$ на прямой и произвольных вещественных чисел a, b выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx \int\limits_{\mathbb{R}} (w-b)^2 |\hat{f}(w)|^2 dw \geq \frac{1}{16\pi^2} \|f\|_2^4.$$

Это утверждение можно неформально интерпретировать следующим образом: не может быть одновременно так, что функция f сосредоточена в малой окрестности точки a, а ее преобразование Фурье – в малой окрестности точки b. Принцип неопределенности Амрейна–Бертье (см. [1]) гарантирует, что множества $E_S = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(f) \subset S\}$ и $\hat{E}_\Sigma = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(\hat{f}) \subset \Sigma\}$, где S, Σ — произвольные подмножества в $\mathbb{R}^n$ конечной меры Лебега, пересекаются только по нулю. Более того, выполняется оценка

$$\|f\|_2^2 \leq C \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus S} |f|^2 dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \Sigma} |\hat{f}|^2 dw \right).$$

Иначе говоря, мы получаем точный вариант приведённого в самом начале неформального утверждения: „малость“ функции здесь означает, что её носитель имеет конечную меру.

Здесь же можно сделать очевидное замечание о том, что для функций f из $L^2(\mathbb{R})$ с ограниченным носителем преобразования Фурье $\hat{f}$ есть целая функция, в частности, и на прямой $\mathbb{R}$ она может иметь лишь изолированные нули. Далее, упомянем и классический результат о том, что если носитель функции $f \neq 0$ ограничен лишь сверху или снизу, то логарифмический интеграл от $\hat{f}$ сходится, так что опять $\hat{f}$ не может равняться нулю на сколь-нибудь „массивном“ множестве. По поводу дальнейшей информации мы отсылаем читателя к монографии [12] В. П. Хавина и Б. Йорике (в которой, кстати, обсуждается и последний из упомянутых результатов).

Однако, наряду с утверждениями, подобными приведённым выше, часто исследуется вопрос о том, сколь сильным одновременным ограничениям на f и $\hat{f}$ может удовлетворять ненулевая функция. Так, П. П. Каргаев в [14] показал, что функция из пространства $L^2(\mathbb{R})$ может быть сосредоточена на множестве конечной меры и иметь лакуну в спектре. Более того, можно найти характеристическую функцию некоторого множества с указанным свойством. Позже П. П. Каргаев и А. Л. Вольберг в [4] построили пример (нетривиальной) функции с носителем конечной меры Лебега, у которой преобразование Фурье обращается в ноль на множестве бесконечной меры.

Недавняя конструкция Ф. Л. Назарова и А. М. Олевского (2017 г.) предлагает ещё более впечатляющее „нарушение“ принципа неопределенности. В работе [7] они показали, что можно построить функцию f из $L^2(\mathbb{R})$ с носителем S конечной меры такую, что

$$|\mathrm{spec}(f) \cap (-R, R)| = o(R), R \to \infty,$$

где под $\mathrm{spec}(f)$ (спектром функции f) понимается носитель преобразования Фурье функции f. Кроме того, такую функцию f можно построить в виде $f = \chi_S$, где χ_S – характеристическая функция множества S. Из конструкции в [7] также следует, что, более того, спектр функции f можно поместить в объединение $K \cup (\cup_{k\in\mathbb{N}}(I_k \cup (-I_k)))$, где K – некоторое компактное множество, содержащее ноль, I_k – произвольные попарно не пересекающиеся интервалы, длины которых стремятся к бесконечности с увеличением индекса, а $-I_k$ – интервалы, симметричные интервалам I_k относительно нуля. Подчеркнём, что никаких условий на длину промежутков между соседними интервалами I_k (т.е. на размеры лакун в спектре) здесь не накладывается.

В 2019 году С. В. Кисляков показал, что небольшая модификация конструкции Назарова и Олевского позволяет изменить произвольное подмножество прямой конечной меры сколь угодно мало так, чтобы характеристическая функция нового множества обладала спектром как из статьи [7] – см. [15]. Кроме того, в той работе демонстрируется, что аналогичное утверждение верно на произвольной (недискретной) локально компактной абелевой группе. Таким образом, результат из [15] может быть трактован не только как „нарушение“ принципа неопределенности, но и как теорема об исправлении. Это последнее обстоятельство, а также структура спектра исправленной функции, связывает его с работой [17], где был установлен аналог теоремы Меньшова об исправлении. Напомним, что теорема Меньшова утверждает, что любую измеримую функцию на окружности можно изменить на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы новая функция обладала равномерно сходящимся рядом Фурье. При этом в [17] спектр исправленной функции располагался в множествах того же типа, что и выше. Схожесть формулировок результатов из [15] и [17] мотивирует вопрос о возможности улучшения конструкции характеристической функции как у Олевского и Назарова до теоремы об исправлении в духе Меньшова. Другими словами, можно ли сказать что-то о частичных суммах или интегралах Фурье исправленной характеристической функции из [15]? Разумеется, равномерно сходящегося ряда Фурье или частичных интегралов Фурье у характеристической (разрывной) функции-исправления не бывает, и лучшее, на что мы могли бы рассчитывать – это равномерная ограниченность частичных сумм или интегралов Фурье.

В настоящей работе мы демонстрируем, что, действительно, для класса характеристических функций можно строить исправления опять до характеристической функции и почти как в теореме Меньшова, с равномерно ограниченными частичными суммами (интегралами) Фурье, и с “лакунарным” спектром. Аналогичный результат может быть получен и на любой локально-компактной абелевой группе конечной топологической размерности, см. [6], однако здесь мы ограничимся многомерными торами $\mathbb{T}^n$ и евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$. Эти примеры одновременно являются самыми наглядными и самыми содержательными, поскольку доказательство для общего случая проводится примерно по той же схеме, с помощью структурной теоремы (см., например, [3]) и леммы “о разнесении спектра” из [15]. Для окружности и прямой также получена точная оценка на супремум модулей частичных сумм (интегралов) Фурье исправленной функции. Отметим, что аналогичная оценка, гарантированная для торов и евклидовых пространств произвольной размерности, далека от оптимальной, а результат для окружности и прямой использует теорему Карлесона о сходимости почти всюду.

Текст организован следующим образом. В разделе 2 мы приводим строгие формулировки результатов, анонсированных выше, а точнее их усиления для “взвешенных” характеристических функций множеств. Раздел 3 посвящен доказательству основного результата. В разделе 4 обсуждаются точные оценки для окружности и прямой.

2 Основные результаты

Пусть G – это (многомерный) тор $\mathbb{T}^n$ или пространство $\mathbb{R}^n$, область определения функций, с которыми мы будем работать. Пусть Γ – это группа, двойственная к G, группа характеров, или, иначе, область определения преобразования Фурье; для упомянутых выше групп Γ – это, соответственно, $\mathbb{Z}^n$ или $\mathbb{R}^n$. Мы обозначаем через dx стандартную меру Хаара на группе G и через $d\gamma$ – на двойственной группе Γ, и считаем, что они нормализованы так, что преобразование Фурье $\mathcal{F} : \mathcal{F}f(\gamma) = \int f(x)\overline{\gamma(x)}dx$, $\gamma \in \Gamma$, $f \in L^1(G)$, является унитарным оператором из $L^2(G)$ в $L^2(\Gamma)$. Мы также используем стандартное обозначение $|e|$ для меры Хаара измеримого подмножества в G или Γ.

Как было сказано во введении, наша цель – исправить характеристическую функцию до новой характеристической функции так, чтобы она имела равномерно ограниченные частичные интегралы (суммы) Фурье и обладала определенной структурой спектра (носителя преобразования Фурье). Опишем, как именно будет выглядеть спектр исправленной функции. Следующее определение стандартно, см. например, [17] и [13].

Определение 1 (достаточные пары)**.** Пара (R, S) замкнутых подмножеств группы Γ называется достаточной, если для любого компактного множества $E \subset \Gamma$ можно подобрать характер $\gamma \in \Gamma$ такой, что $-\gamma + E \subset R$ и $\gamma + E \subset S$.

Например, уже упоминавшееся во введение объединение $\cup_k(I_k \cup (-I_k))$ попарно не пересекающихся интервалов с радиусами, стремящимися к бесконечности, – это на самом деле достаточная пара $(-\cup_k I_k, \cup_k I_k)$ на группе $\mathbb{R}$. Достаточную пару на $\mathbb{R}^n$ можно построить, например, заменив интервалы I_k на попарно не пересекающиеся шары радиусов, стремящихся к бесконечности; точно так же можно построить достаточную пару на $\mathbb{Z}^n$. Спектр функции-исправления будет содержаться в объединении $K \cup R \cup S$, где (R, S) – достаточная пара в Γ, а K – это компактное подмножество, зависящее от исходной характеристической функции.

Теперь обсудим ограниченные частичные суммы или частичные интегралы Фурье. Для этого введем норму $\|\cdot\|_u$, ограниченность которой нас и будет в дальнейшем интересовать.

Сначала определим, как минимум на пространстве $L^2(G)$, для измеримого подмножества E группы Γ оператор P_E следующим образом:

$$P_E f = \mathcal{F}^{-1}(\chi_E \mathcal{F} f).$$

Подмножество B пространства $\mathbb{R}^n$ или группы $\mathbb{Z}^n$ (группы Γ) называется солидным, если точка $y = (y_1, \ldots, y_n)$ лежит в B всякий раз, когда $|y_j| \leq |x_j|$ для $j = 1, \ldots n$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$. Пусть $\mathcal{B}$ – семейство всех солидных подмножеств группы Γ, двойственной к G.

Определение 2 (норма $\|\cdot\|_u$). Для функций f из $L^2(G)$ введем величину

$$\|f\|_u = \sup_{B \in \mathcal{B}} (\|P_B f\|_\infty).$$

Ясно, что частичные суммы или интегралы Фурье функции f на окружности или прямой соответственно равномерно ограниченны тогда и только тогда, когда величина $\|\cdot\|_u$ конечна. Под равномерной ограниченностью частичных сумм или интегралов Фурье на торах или евклидовых пространствах старших размерностей мы будем понимать конечность нормы $\|\cdot\|_u$.

Теперь мы готовы строго сформулировать результаты настоящей работы. Мы докажем "весовую" версию результата, описанного во введении. Весом будем называть равномерно непрерывную, положительную, ограниченную и отделенную от нуля функцию w. Вместо характеристических функций χ_a мы будем исправлять функции $\chi_a w$ до функций того же вида. Не умаляя общности, будем считать, что $w \leq 1$. Зафиксируем заранее достаточную пару (R, S).

Теорема 1. *Для любого положительного ε и произвольного измеримого подмножества a тора $\mathbb{T}^n$ или пространства $\mathbb{R}^n$ ненулевой и конечной меры существует измеримое подмножество b такое, что*

1) $\int\limits_{a \Delta b} w^2 < \varepsilon$,

2) *спектр функции $\chi_b w$ содержится внутри объединения $K \cup R \cup S$ для некоторого компактного подмножества K двойственной группы Γ, зависящего от a,*

3) *норма $\|\chi_b w\|_u$ конечна.*

Теорема об исправлении, которую мы обсуждали во введении, получается из "весового" результата, если положить $w = 1$. Позже мы увидим, что в этом случае также можно обеспечить равенство $|a| = |b|$.

Утверждение о конечности нормы $\|\chi_b w\|_u$ можно уточнить. В действительности $\|P_B(w\chi_b)\|_\infty \le C$, где константа C зависит только от размерности n, если $B \in \mathcal{B}$ содержит компактное подмножество K из пункта 2 теоремы. Это будет ясно в дальнейшем из доказательства. Но ни компакт K, ни нормы $\|P_B(w\chi_b)\|_\infty$ для множеств B таких, что $|B \cap K| > 0$ и $|K \setminus B| > 0$, невозможно хорошо контролировать в общем случае, и равномерная оценка на $\|P_B(w\chi_b)\|_\infty$ зависит от множества a. В дальнейшем мы будем говорить, что такие множества B разбивают множество K.

Однако, в случае размерности $n = 1$, для окружности и прямой оценка на норму $\|\cdot\|_u$ исправления может быть улучшена до точной.

Теорема 2. *Для любого положительного ε и произвольного измеримого подмножества a окружности или прямой ненулевой и конечной меры существует измеримое подмножество b такое, что*

1) $\int\limits_{a\Delta b} w^2 < \varepsilon$,

2) *спектр функции $\chi_b w$ содержится в объединении $K \cup R \cup S$ для некоторого компактного подмножества K двойственной группы Γ, зависящего от a,*

3) $\|\chi_b w\|_u \le C \log(2 + \varepsilon^{-1} \int\limits_a w)$.

3 Доказательство теоремы 1

3.1 Ядра Фейера и покрывающие окрестности

Нам понадобятся две стандартных вспомогательных конструкции, которые мы кратко опишем в этом подразделе.

Первая – это ядра Фейера. Пусть U – это куб с центром в нуле двойственной группы Γ. Определим функцию $\psi_U = (|U|^{-1/2}\chi_U) * (|U|^{-1/2}\chi_U)$; это непрерывная положительная функция, ограниченная сверху единицей, и ее носитель содержится внутри компакта $K = U + U$. Также $\psi_U(0) = 1$. Тогда функция $\Phi_U = \mathcal{F}^{-1}\psi_U$, $\|\Phi_U\|_1 = 1, \Phi_U \ge 0$ – это стандартное ядро Фейера. Напомним, что для расширяющего семейства кубов U на Γ семейство Φ_U образует аппроксимативную единицу. Нам также понадобится следующая очевидная для случая тора или пространства $\mathbb{R}^n$ лемма.

Лемма 1. *Для любого $\eta > 0$ существует такая окрестность U из расширяющегося семейства кубов как выше, что*

$$w * \Phi_U \le (1 + \eta)w.$$

Вторая нужная нам вспомогательная конструкция, использующаяся часто в доказательствах разнообразных теорем типа Меньшова, – это покрывающая окрестность и соответствующее ей разбиение единицы. Получить интуитивное представление об этой конструкции можно, например, в разделе 1 работы [18], где она описана для случая окружности.

Определение 3. Куб с центром в нуле V на группе G называется покрывающей окрестностью, если существует семейство $\{x_i\}_{i\in I}$ точек G такое, что $G = \cup_{i\in I}(x_i + V)$ и $|(x_i + V) \cap (x_j + V)| = 0, i \neq j$.

По покрывающей окрестности V и соответствующему ей семейству точек $\{x_i\}$ из определения выше, построим семейство функций $\{\alpha_i\}_{i\in I}$:

$$\alpha_i(x) = \frac{\chi_V * \chi_V(x - x_i)}{|V|}, x \in G.$$

Отметим, что $\|\alpha_i\|_\infty = 1$ и $\|\mathcal{F}\alpha_i\|_1 = 1$. Нам понадобится еще одна простая лемма.

Лемма 2. *Если D – компактное подмножество в G, а J – конечное подмножество индексов I такое, что $D - V \subset \cup_{i\in J} x_i + V$, то $\{\alpha_i\}_{i\in J}$ – это разбиение единицы на D, т.е. $\sum\limits_{i\in J} \alpha_i = 1$ на D.*

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{i\in J} \alpha_i(x) = \frac{1}{|V|} \int\limits_V \sum_{i\in J} \chi_V(y)\chi_V(x - x_i - y)dy = \frac{1}{|V|} \int\limits_V \sum_{i\in J} \chi_V(x - x_i - y)dy = 1$$

всегда, когда $x \in D$. □

Впоследствии мы также будем пользоваться следующими двумя очевидными наблюдениями. Во-первых, для покрывающей окрестности V верно неравенство $|V + V| \leq 2^n|V|$. Во-вторых, носители ассоциированных с покрывающей окрестностью функций $\{\alpha_i\}$ образуют покрытие группы G кратности не более, чем 2^n.

3.2 Конструкция функции-исправления

В этом подразделе мы опишем основную составляющую доказательства теоремы 1 – конструкцию функции-исправления $\chi_b w$. В ее основе лежит конструкция Назарова и Олевского [7], однако, как отмечалось в [15], неясно, почему норма $\|\cdot\|_u$ исправления, полученного по ней, могла бы быть конечной. Для получения желаемого результата нам придется модифицировать построение из [7]. В частности, нам понадобится более сложная, двойная последовательность приближающих функций $\{f_k^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}_+, 0\leq k\leq n}$ (а не “обычная” как в [7]). Мы докажем, что последовательность-диагональ $f_n^{(n)}$ имеет предел, и что этот предел и есть функция-исправление с точностью до мультипликативной константы. Построение двойной последовательности будет проводиться индукцией по верхнему индексу n. Эту последовательность можно представлять себе как нижне-треугольную бесконечную матрицу; на каждом шаге индукции будет достраиваться очередная строка матрицы.

$$\begin{pmatrix} f_0^{(0)} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_0^{(n-1)} & \dots & f_{n-1}^{(n-1)} & 0 & \dots \\ f_0^{(n)} & \dots & f_{n-1}^{(n)} & f_n^{(n)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1}$$

Итак, пусть нам даны вес w, множество a и малое число $\varepsilon > 0$. Зафиксируем строго монотонную возрастающую последовательность $\{t_n\}_{n\geq 0}, t_n > 1$, такую, что ее предел t не превосходит $1+\varepsilon$. Также зафиксируем положительную последовательность $\{\rho_n\}_{n\geq 0}$ такую, что $\sum\limits_{n\geq 0} \sqrt{\rho_n} < \varepsilon$. Функции $f_k^{(n)}$, которые мы будем строить по индукции, будут в частности обладать следующим списком свойств. Некоторые дополнительные свойства мы пока не перечисляем, но они также будут важны в дальнейших рассуждениях.

(i) Для любого $n \geq 0$ выполняются неравенства

$$0 \leq f_k^{(n)} \leq t_n w, \ k = 0, \dots, n.$$

(ii) Спектры всех функций $f_k^{(n)}$ компактны, и все функции лежат в $L^1(G) \cap C_0(G)$, где $C_0(G)$ – пространство всех непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности ($C_0(G) = C(G)$, если $G = \mathbb{T}^n$). В частности, все функции $f_k^{(n)}$ также лежат в пространстве $L^2(G)$.

(iii) Существует компактная окрестность нуля K группы Γ такая, что спектр каждой функции $f_k^{(n)}$ содержится в объединении $K \cup R \cup S$, где (R, S) – фиксированная заранее достаточная пара.

(iv) Выполняются неравенства

$$\|f_0^{(0)} - \chi_a w\|_1 < \rho_0 \quad \text{и} \tag{2}$$

$$\|f_k^{(n)} - f_k^{(n-1)}\|_1 < \rho_n \tag{3}$$

для $n \geq 1$ и $k = 0, \dots, n-1$. Последний набор неравенств связывает со строкой номер $n-1$ первые n функций в строке под номером n.

Начнем, наконец, строить последовательность. При $n = 0$, возьмем в качестве $f_0^{(0)}$ свертку исходной функции $\chi_a w$ с ядром Фейера Φ_{U_0}, где окрестность $U_0 \subset \Gamma$ выбрана достаточно большой, чтобы обеспечить неравенство (2), т.е. $\|(\chi_a w) * \Phi_{U_0} - \chi_a w\|_1 \leq \rho_0$, а также $w * \Phi_{U_0} \leq t_0 w$. Тем самым мы обеспечили свойства (i) и (iv). Также по построению выполняется свойство (ii), а так как $\mathcal{F}((\chi_a w) * \Phi_{U_0}) = \mathcal{F}(\chi_a w)\mathcal{F}(\Phi_{U_0})$, то $\operatorname{spec}(f_0^{(0)}) \subset K = U_0 + U_0$, и значит свойство (iii) тоже обеспечено. Так как

$\mathcal{F}(f_0^{(0)}) \in L^1(\Gamma)$, норма $\|f_0^{(0)}\|_u$ конечна (хотя и никакой квалифицированной оценки на эту величину не гарантировано).

Индукционный переход. Пусть для $n > 0$ функции $f_0^{(n-1)}, \dots, f_{n-1}^{(n-1)}$ уже построены. Построим следующую строку матрицы (1), то есть функции, верхний индекс которых равен n. Если $k \leq n-1$, возьмем $f_k^{(n)} = \Phi_{U_n} * f_k^{(n-1)}$, где окрестность U_n, как и на этапе базы индукции, выбрана так, чтобы обеспечить неравенство (3) и оценку $w * \Phi_{U_n} \leq \frac{t_n}{t_{n-1}} w$. Позже на U_n будут наложены другие условия, которые, однако, не противоречат тому, что мы только что потребовали. Отметим, что мы обеспечили свойство (iv), а также (i) для всех $k \neq n$.

Теперь построим последнюю функцию в строке, т.е. $f_n^{(n)}$. Сначала рассмотрим функцию

$$g_n = f_{n-1}^{(n-1)} \left(1 - \frac{f_{n-1}^{(n-1)}}{t_{n-1} w} \right). \tag{4}$$

По построению функция g_n неотрицательна (благодаря условию (i)), а ее спектр компактен.

Наша ближайшая цель – сконструировать с помощью разбиения единицы, связанного с подходящей покрывающей окрестностью, приближение функции g_n в виде суммы функций с компактными спектрами; после мы “устраним интерференцию” между слагаемыми в приближении.

Так как $g_n \in L^2(G) \cap C_0(G)$, существует число $\delta > 0$ такое, что на компактном множестве $D = \{x \in G |\ g_n(x) \geq \delta\}$ сосредоточена бóльшая часть L^2-массы функции, то есть $\|(g_n - \delta)\chi_D\|_2 \geq 9/10 \|g_n\|_2$. Обозначим $g = (g_n - \delta)\chi_D$, это непрерывная функция с компактным носителем, которую мы будем приближать вместо g_n. Очевидно, что $g + \delta/2 \leq g_n$ в окрестности W компакта D. Тогда лемма 2 гарантирует, что существует покрывающая окрестность V такая, что $D - V \subset W$, и g можно равномерно и в $L^2(G)$ приблизить с помощью линейной комбинации функций из соответствующего разбиения единицы. А именно, приближение дается конечной суммой

$$h_n = \sum_{i \in J} c_i \alpha_i, \quad c_i = g(x_i) \geq 0.$$

Если покрывающая окрестность V (отвечающая за точность приближения) выбрана достаточно малой, верно неравенство $h_n \leq g_n$, а также

$$\|h_n\|_2^2 \geq \frac{1}{2} \|g_n\|_2^2. \tag{5}$$

Поскольку кратность покрытия, порожденного покрывающей окрестностью V, не превосходит 2^m, если $G = \mathbb{R}^m$ или $\mathbb{T}^m$, то

$$h_n(x)^2 \leq 2^m \sum_{i \in J} (c_i \alpha_i(x))^2, \quad x \in G.$$

Следовательно,

$$\|g_n\|_2^2 \leq 2^{m+1} \sum_{i \in J} (c_i)^2 \|\alpha_i\|_2^2. \tag{6}$$

Теперь заменим функции $\alpha_i, i \in J$, на свертки с ядрами Фейера $\beta_i = \Phi_{U_n} * \alpha_i, i \in J$, спектры которых компактны. В дополнение к уже наложенным выше условиям на U_n потребуем, чтобы выполнялись неравенства

$$\|\beta_i\|_2^2 = \|\Phi_{U_n} * \alpha_i\|_2^2 \geq \frac{1}{2}\|\alpha_i\|_2^2. \tag{7}$$

Напомним, что множество индексов J конечно, так что обеспечить (7) нетрудно. Далее для наглядности мы будем также считать, что множество индексов J – это начальный отрезок натурального ряда $[1, \ldots, |J|]$.

Последнее ограничение, которое мы хотим наложить на U_n, таково. Ясно, что несложно обеспечить последовательность включений $U_0 \subset U_1 \subset \ldots U_n \subset \ldots$. Это будет гарантировать нам в дальнейшем, что спектр функции $f_k^{(n)}$ не будет меняться при изменении n и фиксированном k (спектр функции в столбце матрицы (1) неизменен).

Наконец, определим функцию $f_n^{(n)}$; положим

$$f_n^{(n)} = f_{n-1}^{(n)} + \tilde{h}_n, \quad \text{где } \tilde{h}_n = \operatorname{Re} \sum_{i \in J} c_i \beta_i \gamma_i. \tag{8}$$

Здесь γ_i – характеры группы G (зависящие от номера шага индукции), служащие для "устранения интерференции" между слагаемыми (8), упоминавшейся выше. Это обеспечит нам желаемую оценку на норму $\|\cdot\|_u$, а также нужную структуру спектра искомой функции. Выбор характеров γ_i описывает следующая лемма, доказательство которой почти дословно повторяет доказательство леммы 1 в [15]. Последняя покрывает общий случай произвольной локально компактной абелевой группы конечной топологической размерности, но ее доказательство для пространства $\mathbb{R}^n$ и тора $\mathbb{T}^n$ почти очевидно.

Лемма 3. *Характеры γ_i могут быть выбраны так, что*

1) *носитель преобразования Фурье $Re(\beta_i\gamma_i)$ лежит в объединении достаточной пары $R \cup S$,*

2) *этот носитель не пересекается со спектрами всех функций $f_k^{(j)}$, построенных ранее (т.е. таких, что $j \leq n$ и $k \leq n-1$), со спектрами слагаемых в $\tilde{h}_n$ с меньшими номерами, т.е. со спектрами функций $Re(\beta_s\gamma_s)$ для $1 \leq s < i$, а также с объединением всех солидных множеств в $\mathcal{B}$, которые разбивают какой-либо из спектров, перечисленных в этом пункте (то есть $|B \cap M| > 0$ и $|M \setminus B| > 0$ для какого-либо спектра M функций, перечисленных выше),*

3) *$\pm 2\gamma_i$ не лежит в спектре функции β_i^2.*

Доказательство. Для полноты изложения мы приводит здесь набросок доказательства для наглядного случая $G = \mathbb{R}^n$ и $(R, S) = (-\cup_l I_l, \cup_l I_l)$.

Индукция по i. Пусть мы уже построили все функции $f_k^{(j)}$ при $j \le n$ и $k \le n-1$. По общему индукционному предположению для нашей конструкции спектры всех этим функций компактны и симметричны относительно нуля. Также компактны и симметричных относительно нуля и спектры всех функций β_i. Пусть D – объединение всех спектров $f_k^{(j)}, j \le n, k \le n-1$, а также всех солидных множеств, разбивающих эти спектры. Тогда ясно, что существует характер γ_1 такой, что $-\gamma_1 + \mathrm{spec}\beta_1$ и $\gamma_1 + \mathrm{spec}\beta_1$ не пересекают D (достаточно выбрать $|\gamma_1| > |\eta|$ для всех $\eta \in D + \mathrm{spec}\beta_1$), и при этом первое множество лежит в R, а второе – в S: нужно выбрать любое l такое, что $|I_l| > |\mathrm{spec}\,\beta_1|$ и $D \cap I_l = \emptyset$ (и при необходимости увеличить модуль выбранного характера). Другими словами, носитель преобразования Фурье β_0 нужно "отнеси достаточно далеко" от множества D так, чтобы спектр $\mathrm{Re}(\gamma_0\beta_0)$ попадал в объединение одной из пар интервалов $I_l \cup -I_l$. Аналогично можно гарантировать и свойство 3. На шаге $i+1$ нужно повторить рассуждение, взяв в качестве множества D объединение всех спектров функций $f_k^{(j)}, j \le n, k \le n-1$, $\beta_m\gamma_m, m \le i$ и солидных множеств, их разбивающих. $\square$

Для завершения индукционного перехода осталось проверить, что свойства (i)-(iv) выполнены для только что построенной функции $f_n^{(n)}$. Но свойство (iv) не накладывает на нее никаких требований, (iii) обеспечивается леммой 3, а свойство (ii) ясно. Так что нам нужно проверить только (i). По определению функций β_i,

$$\|\mathrm{Re}\sum_{i\in J} c_i\beta_i\gamma_i\| \le \sum_{i\in J} c_i\alpha_i * \Phi_{U_n} = h_n * \Phi_{U_n} \le g_n * \Phi_{U_n}.$$

По определению функций $f_n^{(n)}$ и $f_{n-1}^{(n)}$ имеем

$$\Phi_{U_n} * (f_{n-1}^{(n-1)} - g_n) \le f_n^{(n)} \le \Phi_{U_n} * (f_{n-1}^{(n-1)} + g_n).$$

Наконец, по индукционному предположению в (i) и определению функции g_n (см. (4)), заключаем, что $f_{n-1}^{(n-1)} - g_n \ge f_{n-1}^{(n-1)} - f_{n-1}^{(n-1)} \ge 0$ и

$$f_{n-1}^{(n-1)} + g_n \le f_{n-1}^{(n-1)} + t_{n-1}w\left(1 - \frac{f_{n-1}^{(n-1)}}{t_{n-1}w}\right) = t_{n-1}w.$$

Так что $f_n^{(n)} \ge 0$ и

$$f_n^{(n)} = \Phi_{U_n}\left(f_{n-1}^{(n-1)} + \sum_{i\in J} c_i\alpha_i\gamma_i\right) \le \Phi_{U_n} * (f_{n-1}^{(n-1)} + g_n) \le \Phi_{U_n} * (t_{n-1}w) \le t_n w$$

благодаря выбору окрестности U_n. Индукционный переход завершен.

3.3 Сходимость, исправление и спектр

В этом подразделе мы покажем, что построенная нами последовательность $\{t_n^{-1} f_n^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ сходится к функции вида $\chi_b w$, для которой верны все заключения теоремы 1, кроме конечности нормы $\|\cdot\|_u$ (которой мы займемся в следующем подразделе).

3.3.1 Сходимость

Сначала заметим, что для любого k предел $F_k = \lim_{j\geq k, j\to\infty} f_k^{(j)}$ существует в $L^2(G)$ (предел столбца в матрице (1)). Действительно, оценка сверху на $f_k^{(j)}$ из (i) и свойство (3) из (iv) гарантируют, что $\|f_k^{(j)} - f_k^{(j-1)}\|_2 \leq c\sqrt{\rho_j}$. Кроме того, мы потребовали, чтобы ряд $\sum\limits_j \sqrt{\rho_j}$ сходился.

Отметим далее, что функции F_k – это частичные суммы некоего ортогонального ряда. Действительно, для фиксированного n спектры функций $f_0^{(n)}, f_1^{(n)} - f_0^{(n)}, \dots, f_n^{(n)} - f_{n-1}^{(n)}$ попарно не пересекаются: мы потребовали этого в лемме 3. Значит эти функции попрано ортогональны, и переход к пределу при $n \to \infty$ дает нужное нам свойство.

Также несложно видеть, что

$$\int\limits_G f_k^{(n)}(x)dx = \int\limits_a w(x)dx \tag{9}$$

для всех $n \geq 0$ и $k = 0, \dots n$. Действительно, для $k = n = 0$ и $k = 0, n = 1$ это очевидно, поскольку функции $f_k^{(n)}$ получены в этом случае сверткой функции $\chi_a w$ с ядрами Фейера – положительными функциями, которые имеют L^1-норму, равную единице. По построению интеграл функции $f_1^{(1)} - f_0^{(1)}$ равен нулю (см. (8)), так что (9) верно и для $k = n = 1$. Аналогично, утверждение верно и для всех остальных $f_k^{(n)}$: при $k < n$ функции получаются из предыдущих свертками с ядрами Фейера, а при $k = n$ разность $f_n^{(n)} - f_{n-1}^{(n)}$ имеет нулевой интеграл.

Пользуясь равенством (9), мы заключаем, что

$$\int\limits_G (F_k)^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_G (f_k^{(n)})^2 dx \leq c \int\limits_a w(x)dx,$$

так что последовательность $\{F_k\}$ имеет предел F в $L^2(G)$. Поскольку

$$\|F_k - f_k^{(k)}\|_2 \leq c \sum_{i>k} \sqrt{\rho_i} \quad \text{и} \quad \|F_{k-1} - f_{k-1}^{(k)}\|_2 \leq c \sum_{i>k} \sqrt{\rho_i},$$

ясно, что последовательности $\{f_k^{(k)}\}$ и $\{f_{k-1}^{(k)}\}$ также сходятся к F в $L^2(G)$ при $k \to \infty$. Значит, $\|\tilde{h}_k\|_2 = \|f_k^{(k)} - f_{k-1}^{(k)}\|_2 \to 0, k \to \infty$. Но слагаемые $\mathrm{Re}(c_i \beta_i \gamma_i)$ в $\tilde{h}_k$ попарно ортогональны по построению (см., опять же, лемму 3). Так что

$$\|\tilde{h}_k\|_2^2 = \sum_{i\in J} \|\mathrm{Re}(c_i \beta_i \gamma_i)\|_2^2.$$

Осталось заметить, что $\|\mathrm{Re}(\gamma_i \beta_i)\|_2^2 = \frac{1}{2}\int\limits_G \beta_i^2$, то есть по (5), (6) и (7) величина $\|\tilde{h}_k\|_2^2$ мажорирует с коэффициентом квадрат L^2-нормы функции g_k. А значит $g_k \to 0$ в L^2.

По построению, $g_k = f_{k-1}^{(k-1)} \left(1 - \frac{f_{k-1}^{(k-1)}}{t_{n-1} w}\right)$. Раз $\{f_k^{(k)}\}$ сходится к F в L^2, то какая-то подпоследовательность этой последовательности сходится к F почти всюду. Но тогда, поскольку $g_k \to 0$ при $k \to \infty$ в L^2, для почти всех $x \in G$ либо $F(x) = 0$, либо $F(x) = tw(x)$. Следовательно, $F = t\chi_b w$ для какого-то измеримого множества b.

Мы отложим ненадолго изучение нужных нам свойств множества b; пока докажем следующее вспомогательное равенство:

$$\int\limits_b tw(x)dx = \int\limits_a w(x)dx. \tag{10}$$

Действительно, неравенство (3) гарантирует, что $f_k^{(n)} \to F_k, n \to \infty$, также и в $L^1(G)$. Значит для всех k, благодаря формуле (9), выполняется $\int\limits_G F_k(x)dx = \int\limits_a w(x)dx$. Поскольку функции F_k положительны, лемма Фату гарантирует интегрируемость функции F и неравенство $\int\limits_G F(x)dx \le \int\limits_a w(x)dx$. Однако последнее неравенство на самом деле является равенством. По построению и по теореме Планшереля, преобразования Фурье $\mathcal{F}(F)$ и $\mathcal{F}(F_0)$ совпадают почти всюду в окрестности нуля на Γ. Также $\mathcal{F}(F)$ и $\mathcal{F}(F_0)$ непрерывны, значит совпадают в нуле, откуда следует (10).

Напоследок отметим, что $\int\limits_b w \le \int\limits_a w$, так как $t > 1$.

3.3.2 Исправление

В этой секции мы докажем, что функция $\chi_b w$ действительно является исправлением функции $\chi_a w$, т.е. множества a и b отличаются мало. Выше уже обсуждалось, что функции F_0 и $F - F_0$ ортогональны, так что верно равенство $\int\limits_G F_0 F dx = \int\limits_G (F_0)^2 dx$. Так как $\|f_0^{(0)} - F_0\|_2 \le \varepsilon$ (поскольку мы потребовали от последовательности $\{\rho_i\}$, чтобы $\sum \sqrt{\rho_i} < \varepsilon$), выполняется соотношение

$$\int\limits_G f_0^{(0)} F = \int\limits_G (f_0^{(0)})^2 + O(\varepsilon).$$

Далее,

$$\int\limits_{a\cap b} w^2 = \frac{1}{t} \int\limits_G (\chi_a w) F = \frac{1}{t} \left(\int\limits_G (\chi_a w - f_0^{(0)}) F + \int\limits_G (f_0^{(0)})^2 + O(\varepsilon) \right).$$

Ясно, что первое слагаемое в правой части внутри скобок – это $O(\varepsilon)$ по свойству (iv). Второе слагаемое можно оценить снизу следующим образом:

$$\int\limits_G (f_0^{(0)})^2 \ge \int\limits_G (\chi_a w)^2 - \int\limits_G |(f_0^{(0)})^2 - (\chi_a w)^2| \ge \int\limits_a w^2 - c_1 \int\limits_G |f_0^{(0)} - \chi_a w|.$$

Интеграл $\int\limits_G |f_0^{(0)} - \chi_a w|$ тоже имеет порядок $O(\varepsilon)$. Таким образом,

$$\int\limits_{a\cap b} w^2 \ge \frac{1}{t} \int\limits_a w^2 - c_2\varepsilon \ge \int\limits_a w^2 - c_3\varepsilon,$$

если мы выбрали t достаточно близким к единице. Аналогично несложно показать, что

$$\int\limits_{a\cap b} w^2 \geq \frac{1}{t}\int\limits_b w^2 - c_4\varepsilon.$$

А значит

$$\int\limits_{a\Delta b} w^2 = \int\limits_{a\setminus b} w^2 + \int\limits_{b\setminus a} w^2 = \int\limits_a w^2 + \int\limits_b w^2 - 2\int\limits_{a\cap b} w^2 \leq C\varepsilon,$$

что и требовалось.

Обсудим ситуацию, когда $w = 1$. В этом случае все рассуждения работают с последовательностью $\{t_n\}$, тождественно равной единице, и $t = 1$. Тогда формула (10), действительно, обеспечивает нам равенство $|a| = |b|$.

3.3.3 Спектр

Ясно, что требование к спектру функции $\chi_b w$ в теореме 1 выполняется по построению.

3.4 Равномерная ограниченность частичных интегралов Фурье

Напомним, что по построению спектр функций $f_k^{(n)}$ не меняется, когда k фиксировано, а $n \geq k$ (спектр у функций в одном столбце одинаковый).

Возьмем солидное множество $B \in \mathcal{B}$ и выберем минимальное k такое, что B спектр функции $f_k^{(k)}$ не содержится в B (включения здесь и далее – с точностью до множеств меры ноль). Для доказательства ограниченности нормы $\|\cdot\|_u$ нам достаточно предъявить равномерную оценку на $|P_B f_k^{(k)}|$. Действительно, пусть мы доказали равномерную оценку $|P_B f_k^{(k)}| \leq M$. Для любого $j > k$ функция $f_k^{(j)}$ получена из функции $f_k^{(k)}$ сверткой с ядром Фейера, которая коммутирует с оператором P_B, так что $|P_B f_k^{(j)}| \leq M$. Но тогда по построению (см. лемму 3) $P_B f_k^{(k)} = P_B f_j^{(j)}, j \geq k$, так что $\|P_B f_j^{(j)}\| \leq M, j \geq k$, поэтому для предельной функции F верна та же оценка: $|P_B F| \leq M$.

Нужная равномерная оценка на $|P_B f_k^{(k)}|$ зависит от k следующим образом. Если $k = 0$ (это значит, что множество B разбивает носитель функции $f_0^{(0)}$, т.е. $|\mathrm{supp} f_0^{(0)} \setminus B| > 0$ и $|\mathrm{supp} f_0^{(0)} \cap B| > 0$), то ясно, что $|P_B f_0^{(0)}| \leq \|\mathcal{F} f_0^{(0)}\|_1$. Эта оценка, действительно, не зависит от B, однако априори величину $\|\mathcal{F} f_0^{(0)}\|_1$ мы не можем никак эффективно контролировать в зависимости от ε, w и a. Но если $k > 0$, что гарантировано, если компакт $K = U_0 + U_0$ из нашей конструкции содержится в B, по минимальности индекса k носитель функции $\mathcal{F} f_{k-1}^{(k)}$ содержится в B. А значит, $P_B f_k^{(k)} = f_{k-1}^{(k)} + P_B \tilde{h}_k$ согласно (8). Ясно, что все функции $f_j^{(n)}$ равномерно ограничены по построению, поэтому нам осталось оценить второе слагаемое $P_B \tilde{h}_k$.

Характеры γ_i были выбраны так, что существует единственное $l \in \mathbb{N}$ (напомним, что мы считаем множество индексов J начальным отрезком натурального ряда) со следующим свойством:

$$P_B \tilde{h}_k = \sum_{i<l} \mathrm{Re}(c_i \beta_i \gamma_i) + P_B \left(\mathrm{Re}(c_l \beta_l \gamma_l) \right).$$

Поскольку $\beta_i = \Phi_{U_n} * \alpha_i, i \in J$, а $|c_i| = |g(x_i)| \leq 2$, мы получаем

$$\left| \sum_{i<l} \mathrm{Re}(c_i \beta_i \gamma_i) \right| \leq 2 \sum_{i<l} \Phi_{U_n} * \alpha_i = 2\Phi_{U_n} * \left(\sum_{i<l} \alpha_i \right) \leq 2,$$

а

$$|P_B(\mathrm{Re}(c_l \beta_l \gamma_l))| \leq 2 \|\mathcal{F} \left(\frac{\gamma_l + \bar{\gamma}_l}{2} \beta_l \right) \|_1 \leq \|\mathcal{F} \alpha_l\|_1 \leq 1.$$

Таким образом, равномерная оценка на $|P_B(f_k^{(k)})|$ получена, и доказательство теоремы 1 завершено.

4 Точные оценки нормы $\| \cdot \|_u$

В этом разделе мы обсудим доказательство теоремы 2, а также почему оценка на норму $\| \cdot \|_u$ из нее является точной.

Как было показано в последней секции предыдущего раздела, препятствие для количественной оценки в терминах ε, w и a нормы $\| \cdot \|_u$ представляет лишь функция $f_0^{(0)}$. Для получения заявленной в пункте 3 теоремы 2 оценки достаточно предъявить ее для этой функции. Мы можем гарантировать такую оценку для случаев $G = \mathbb{R}$ и $G = \mathbb{T}$ благодаря следующему результату, см. [5].

Пусть X – банахово пространство, состоящее из локально интегрируемых функций на пространстве с мерой (S, μ). Пусть $L_0^\infty(\mu)$ – пространство всех существенно ограниченных функций с носителем конечной меры. Тогда если $g \in L_0^\infty(\mu)$, то интеграл $\Psi_g(u) = \int_S gud\mu$ определяет линейный функционал на пространстве $L^1_{loc}(\mu)$, а значит и на любом его линейном подпространстве. Пусть выполнены следующие два условия.

A1. Естественное вложение $X \hookrightarrow L^1_{loc}(\mu)$ непрерывно и единичный шар пространства X слабо компактен в $L^1_{loc}(\mu)$.

A2. Для любой функции $g \in L_0^\infty(\mu)$ выполняется оценка слабого типа

$$m(\{|g| > t\}) \leq c \frac{\|\Psi_g\|_{X^*}}{t},$$

где константа c зависит только от пространства X.

Теорема 3. *Для любой функции $f \in L^\infty(\mu) \cap L^1(\mu)$ с нормой $\|f\|_\infty$ не больше единицы и любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция ϕ такая, что $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi f \in X$, $\mu(\{\phi \neq 1\}) \leq \varepsilon$ и $\|\phi f\|_X \leq c \log(2 + \varepsilon^{-1}\|f\|_1)$. Константа в последней оценке зависит только от константы в условии* A2.

Для $G = \mathbb{R}^n$ или $G = \mathbb{T}^n$ и $e \subset G$ конечной и ненулевой меры определим пространство

$$u(G, e) = \{f : \ f \in L^2(G), \ \mathrm{supp} f \subset e, \text{ и } \|f\|_u = \sup_{B \in \mathcal{B}} \|P_B f\|_\infty < \infty\}.$$

Все функции f из этого пространства лежат в $L^\infty(G)$, так как $\|f\|_\infty \leq \|f\|_u$. Если $G = \mathbb{T}^n$, нам интересен только случай $e = G$, и мы будем писать $u(G)$ вместо $u(G, G)$.

Мы будем использовать теорему 3 для случаев $X = u(\mathbb{R}, e)$ и $X = u(\mathbb{T})$ для одномерных групп $G = \mathbb{R}$ и $G = \mathbb{T}$ соответственно. В качестве меры μ возьмем меру Лебега на множестве e или на окружности. Тогда оба заявленных пространства очевидно удовлетворяют аксиоме A1, и они также удовлетворяют аксиоме A2, но последнее вовсе не тривиально, поскольку опирается на теорему Карлесона о сходимости почти всюду. Доказательства этого факта для пространств $u(\mathbb{R}, e)$ и $u(\mathbb{T})$ изложены в [8] и [11], некоторые пояснения также даны в разделах 2.5 и 2.6 работы [5].

Итак, у нас есть весовая функция $w \leq 1$ и множество a конечной меры, которое мы хотим исправить с точностью ε. Перед тем, как стоить исправление согласно конструкции из раздела 3.2, исправим начальную функцию $f = \chi_a w$ с помощью теоремы 3 (с $X = u(\mathbb{R}, e)$ или $X = u(\mathbb{T})$). Получившаяся в результате функция $\tilde{f} = f\phi$ удовлетворяет условиям $0 \leq \tilde{f} \leq w$ и

$$\|\tilde{f}\|_u \leq C \log\left(2 + \frac{\int_a w}{\varepsilon}\right), \tag{11}$$

где константа C не зависит от a, а также $\|\chi_a w - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon$. Далее, как и раньше, возьмем в качестве $f_0^{(0)}$ функцию $\tilde{f} * \Phi_{U_0}$, так что (2) выполняется, но с $\varepsilon + \rho_0$ в правой части вместо ρ_0. Для функции $f_0^{(0)}$ выполняется оценка (11), поскольку она выполняется для $\tilde{f}$. Все остальные элементы конструкции остаются без изменений, как и, по существу, доказательства из последующих секций. Теорема 2 доказана.

Покажем напоследок, что оценка вида (11) точна по ε, то есть асимптотику правой части $C \log \frac{1}{\varepsilon}$ улучшить нельзя. Рассуждение ниже взято из работы [16]. Мы ограничимся рассмотрением случая $G = \mathbb{T}$, в случае прямой доказательство полностью аналогично. В наших обозначениях, пространство U из [16] – это пространство $u(\mathbb{T})$, а оператор S_N, стандартный оператор взятия частичной суммы, – это $P_{[-N,N]}$, но для удобства изложения мы сохраним обозначение S_N.

Утверждение. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in L^\infty$, не равная нулю и такая, что если $g \in u(\mathbb{T})$ и $|\{f \neq g\}| \leq \varepsilon$, то $\|g\|_u \geq c \log \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_\infty$.*

Доказательство. Основная идея доказательства заключается в логарифмическом росте L^1 норм ядер Дирихле. Напомним, что ядро Дирихле $D_N(x)$ — это сумма

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-N}^{N} e^{ijx}, \text{ или } D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{2\pi\sin(x/2)},$$

$$\text{а также что } S_N f(x) = D_N * f(x).$$

Хорошо известно, что

$$\int\limits_0^{2\pi} |D_N(x)|dx \gtrsim \int\limits_0^{\pi} \frac{|\sin((2N+1)x)|}{x}dx \gtrsim \int\limits_0^{(2N+1)\pi} \frac{|\sin(s)|}{s}ds \gtrsim$$

$$\gtrsim \sum_{k=0}^{2N} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin s|}{s}ds \gtrsim \sum_{k=0}^{2N} \int\limits_0^{\pi} \frac{|\sin(s)|}{(k+1)\pi}ds \gtrsim \log N.$$

Таким образом, если мы положим $f_N(x) = \mathrm{sign} D_N(x)$, то будем иметь $f = f_N \in L^\infty$, $\|f\|_\infty = 1$ и $\|S_N f\|_\infty \geq C\log N$. Пусть g – исправление функции f, т.е. $g \in u(\mathbb{T})$ и $|\{f \neq g\}| < \varepsilon$. Тогда

$$C\log N \geq \|S_N f\|_\infty \leq \|S_N(f-g)\|_\infty + \|g\|_u.$$

Так как для любого тригонометрического полинома p степени N справедливо неравенство $\|p\|_\infty \leq \sqrt{2N+1}\|p\|_2$, имеем

$$\|S_N(f-g)\|_\infty \leq \sqrt{2N+1}\|S_N(f-g)\|_2 \leq \sqrt{2N+1}\|f-g\|_2 \leq$$

$$\leq \sqrt{2N+1}\sqrt{\varepsilon}\|f-g\|_\infty \leq \sqrt{\varepsilon(2N+1)}(1+\|g\|_u).$$

А значит верно неравенство

$$C\log N \leq \sqrt{\varepsilon(2N+1)}(1+\|g\|_u) + \|g\|_u,$$

которое дает нам нужную оценку снизу на норму $\|g\|_u$, если положить $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. □

Отметим, что оценка (11) является точной также и для класса характеристических функций. Действительно, если для $f_N = \mathrm{sign} D_N$ выполняется $\|S_N f_N\|_\infty \geq C\log N$, то для функции $f_{-,N} = -\chi_{D_N<0}$ или $f_{+,N} = \chi_{D_N\geq 0}$ верна та же оценка, но с константой $C/2$ (потому что иначе получилось бы, что $\|S_N f_N\|_\infty \leq \|S_N f_{-,N}\|_\infty + \|S_N f_{+,N}\|_\infty < C/2\log N + C/2\log N = C\log N$). После этого достаточно повторить рассуждение выше с функцией g из класса характеристических функций для доказательства нужного нам утверждения.

Утверждение. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует множество a ненулевой меры такое, что если характеристическая функция множества b лежит в пространстве $u(\mathbb{T})$ и $|a\Delta b| < \varepsilon$, то $\|\chi_b\|_u \geq c\log\frac{1}{\varepsilon}$.*

Отметим, что в теореме 2 невозможно избавиться от плохо контролируемого в терминах ε множества K в спектре исправленной функции из-за оценки (11). Результаты о функциях-исправлениях со спектрами, лежащими в достаточной паре $R \cup S$, получены, например, в [9], [10] и [17], однако в этом случае контроль $\|\cdot\|_u$-нормы гораздо более слабый.

Список литературы

[1] W. O. Amrein, A. M. Berthier, "On support properties of L^p-functions and their Fourier transfroms", J.Funct.Anal. 24 (1977), 258-267,

[2] K. Gröcheenig, "Foundations of Time-Frequency Analysis",

[3] E. Hewitt, K. A. Ross, "Abstract Harmonic Analysis I",

[4] P. P. Kargaev, A. L. Volberg, Three results concerning the support of functions and their Fourier transforms, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 1143-1164,

[5] S. V. Kislyakov, "A sharp correction theorem", Stud. Math. 113(2), 177-196 (1995),

[6] S. V. Kislyakov, P. S. Perstneva, "Indicator Functions with Uniformly Bounded Fourier Sums and Large Gaps in the Spectrum", J. Fourier Anal. Appl. 27, 33 (2021),

[7] F. Nazarov, A. Olevskii, "A function with support of finite measure and small spectrum", in A. Baranov, S. Kisliakov, N. Nikolski (eds.), 50 Years with Hrady Spaces. A tribute to Victor Havin, Operator Theory: Advances and Applications 261, pp. 389-393. Birkhäuser, Cham (2018),

[8] J. Rubio de Francia, F. J. Ruiz, J. L. Torrea, "Calderon-Zygmund theory for operator-valued kernels", Adv. Math. 62, 7-48(1986),

[9] Ф. Г. Арутюнян, "Некоторое усиление теоремы Меньшова «Об исправлении»", Матем. заметки, 1984, том 35, выпуск 1, 31–41,

[10] Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций кратными рядами", Доклады АН Армянской ССР 64, 72-76 (1977),

[11] С. А. Виноградов, "Усиление теоремы Колмогорова о сопряженной функции и интерполяционные свойства равномерно сходящихся степенных рядов", Спектральная теория функций и операторов. II, Сборник статей, Тр. МИАН СССР, 155, 1981, 7–40,

[12] Б. Ёрикке, В. П. Хавин, "Принцип неопределенности в гармоническом анализе", Коммутативный гармонический анализ – 3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 72, ВИНИТИ, М., 1991, 181–260,

[13] П. Иванишвили, С. В. Кисляков, “Исправление до функции с редким спектром и равномерно сходящимся рядом Фурье”, Исследования по линейным операторам и теории функций. 38, Зап. научн. сем. ПОМИ, 376, ПОМИ, СПб., 2010, 25–47,

[14] П. П. Каргаев, “Преобразование Фурье характеристической функции множества, исчезающее на интервале”, Матем. сб., 117(159):3 (1982), 397–411,

[15] С. В. Кисляков, “Исправление до функций с редким спектром и равномерно сходящимся интегралом Фурье в случае группы $\mathbb{R}^n$”, Зап. научн. сем. ПОМИ, 467 (2018), 116–127,

[16] С. В. Кисляков, “Количественный аспект теорем об исправлении”, Исследования по линейным операторам и теории функций. IX, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 92, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1979, 182–191,

[17] С. В. Кисляков, “Новая теорема об исправлении”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 48:2 (1984), 305–330,

[18] С. В. Хрущев, “Теорема Меньшова об исправлении и гауссовские процессы”, Спектральная теория функций и операторов. II, Сборник статей, Тр. МИАН СССР, 155, 1981, 151–181.